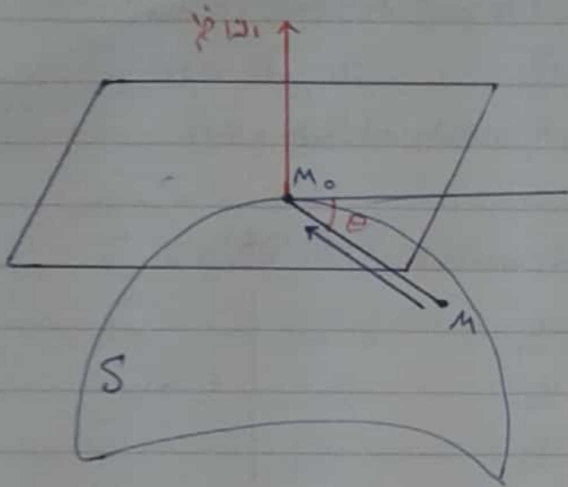


المستوي المماس للسطح :

ليكن S سطحاً، $M_0 \in S$ ، M نقطة متحولة من السطح S ، ولتكن P مستوٍ يمر من M_0.
نقول عن P أنه مماس للسطح S في M_0 ، إذا تناهت الزاوية بين $\overrightarrow{M_0M}$ والمستوي P إلى الصفر عندما تقترب M من M_0.
"يكون الناظم على السطح ناظماً على المستوي أيضاً"

تفاضل دالة متجهة :

نفرض S سطحاً معطى بالدالة المتجهة
$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) \quad ; \quad (u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$
إن التفاضل التام للدالة المتجهة $\vec{r}$ يعطى بالعلاقة :
$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv$$
نرمز $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \vec{r}_u$ ، $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{r}_v$

حيث : $\vec{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$ ، $\vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u)$

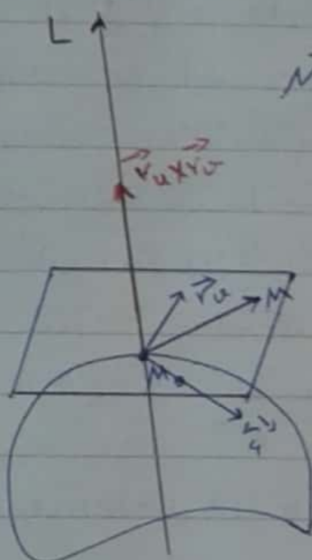
السطح النظامي (الشرط اللازم والكافي لوجود المستوي المماس لسطح نظامي) :

ليكن S سطحاً معطى بالدالة المتجهة $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$
نقول عن السطح S أنه نظامي إذا كان المتجهان $\vec{r}_u$ ، $\vec{r}_v$ مستقلان خطياً $(\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0)$ وحيث تكون الدالة المتجهة $\vec{r}(u,v) \in C^\infty$

• حالة خاصة إذا كانت $\vec{r} \in C^1$ فإننا نسمي السطح عندئذٍ سطحاً أملساً.
ويمكن أن يعرف السطح الأملس (هندسياً) بالشكل التالي :
يكون السطح S أملساً في نقطة ما منه M_0 إذا كانت النقاط المختلفة في جوار ما لـ M_0 من السطح S لها مساقط مختلفة على المستوي المماس للسطح في M_0.
(الربط أملس في جميع نقاطه ماعدا الذروة)

ونقبل دون برهان : أن الشرط اللازم والكافي لوجود المستوي المماس لسطح S هو أن تكون الدالتان $\vec{r}_u$ ، $\vec{r}_v$ مستقلتين خطياً.

تعريف: يعرف المستوي المماس لسطح S في M_0 بأنه المستوي المار من M_0 والناظم عليه هو المتجه $\vec{r_u} \times \vec{r_v}$.



وبالتالي المعادلة المتجهة للمستوي المماس هي:

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot (\vec{r_u} \times \vec{r_v})$$

• الشكل التحليلي لمعادلة المستوي المماس هي:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0$$

المستقيم الناظمي لسطح ومعادلاته:

المستقيم الناظمي لسطح S في نقطة M_0 منه، هو الخط المار من M_0 ومنحاه منحى الناظمي للسطح $(\vec{r_u} \times \vec{r_v})$. وبالتالي المعادلات التحليلية له هي:

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}}$$

ملاحظة: إذا أعطي السطح بالشكل العام $F(x,y,z) = 0$.

كما نعلم من نظرية تحليل المتجهات أن منحى الناظمي للسطح في نقطة ما منه هو المتجه.

$$\vec{\nabla} F = (F_x, F_y, F_z)$$

وبالتالي معادلة المستوي المماس للسطح في M_0 هي:

$$F_x(x-x_0) + F_y(y-y_0) + F_z(z-z_0) = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{M_0M}) \cdot \vec{\nabla} F = 0$$

• معادلة المستقيم الناظمي للسطح في M_0 منه هي:

$$\frac{x-x_0}{F_x} = \frac{y-y_0}{F_y} = \frac{z-z_0}{F_z}\Bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}$$

/ /

مثال: تحقق من أن سطح الطارة سطح نظامي، وجد الخطوط الإحداثية عليه.

الحل: وجدنا أن المعادلة المتجهة لسطح الطارة هي:

$$\vec{r}(u,v) = \big((a+b\sin v)\cos u\ ,\ (a+b\sin v)\sin u\ ,\ b\cos v\big)$$

لدينا:

$$\vec{r}_u = \big(-(a+b\sin v)\sin u\ ,\ (a+b\sin v)\cos u\ ,\ 0\big)$$

$$\vec{r}_v = \big(b\cos v\cos u\ ,\ b\cos v\sin u\ ,\ -b\sin v\big)$$

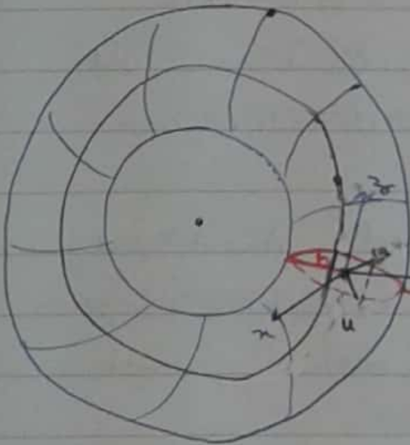
$$\Rightarrow \vec{r}_u \times \vec{r}_v = b\,(a+b\sin v)\ \big(-\sin v\cos u\ ,\ -\sin v\sin u\ ,\ -\cos v\big)$$

متجه واحدة لأن طويلته تساوي الواحد

نلاحظ أن $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = |b|\,|(a+b\sin v)| \neq 0$ في جميع نقاط الطارة.

وبالتالي سطح الطارة سطح نظامي على اعتبار أن $\vec{r}(u,v) \in C^\infty$

«أي قابلة للاشتقاق عدد كبير من المرات»



نلاحظ أن المنحنيات ذات الوسيط v هي الدوائر المولدة لسطح الطارة. والمنحنيات ذات الوسيط u هي الدوائر الناتجة عن تقاطع سطح الطارة مع مستويات توازي XOY.

السطوح المسطَّرة:

السطح المسطَّر هو سطح تولده مجموعة مستقيمات تستند على منحنٍ ما.

نفرض $f(u)$ المعادلة المتجهة للمنحني الذي تستند عليه المستقيمات المولدة.

تكون المعادلة المتجهة للسطح المسطَّر بالشكل:

$$\vec{r}(u,v) = \vec{f}(u) + v\,\vec{g}(u)$$

• حالة خاصة: إذا كانت المستقيمات المولدة للسطح متوازية (أسماء سطور السطح). ينتج عندئذٍ السطح الأسطواني.

/ /

المنحنيات ذات الوسيط u

أسطر السطح

$\vec{g}$

$\vec{f}(u)$

المنحني الاستنادي $C \equiv f(u)$

نفرض $\vec{g}$ متجه واحدة منحاه منحٍ (أسطر السطح الاسطواني)

عندئذٍ:

معادلة السطح الاسطواني ناتجة الشكل

$$\vec{r}(u,v) = \vec{f}(u) + v\,\vec{g}$$

المنحنيات ذات الوسيط u هي المنحني الاستنادي والمنحنيات الناتجة عنه بانسحاب موازٍ له.
والمنحنيات ذات الوسيط v هي مولدات السطح.

القياس على سطح "الصيغة التربيعية الأولى":

ليكن S سطحاً نظامياً $S \equiv \vec{r} = \vec{r}(u,v) \quad ; \quad (u,v) \in D$

وجدنا أن التفاضل التام للدالة $\vec{r}$ يعطى بالعلاقة:

$$d\vec{r} = \vec{r}_u\, du + \vec{r}_v\, dv$$

إن الجداء الداخلي لـ $d\vec{r}$ و $d\vec{r}$ والذي نرمز له بـ $(d\vec{r})^2$ أو I
يسمى الصيغة التربيعية الأولى للسطح S (القياس على سطح).

أي:
$$I = (d\vec{r})^2 = (\vec{r}_u\, du + \vec{r}_v\, dv)(\vec{r}_u\, du + \vec{r}_v\, dv)$$

$$= (\vec{r}_u)^2 (du)^2 + 2\,\vec{r}_u \vec{r}_v\, du\, dv + (\vec{r}_v)^2 (dv)^2$$

نرمز لـ $(\vec{r}_u)^2 = E$, $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = F$, $(\vec{r}_v)^2 = G$

عندئذٍ تكتب الصيغة التربيعية الأولى بالشكل:

$$\boxed{I = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2}$$

/ /

لنوجد إشارة : $EG-F^2$

$$EG-F^2 = |\vec{r_u}|^2 |\vec{r_v}|^2 - (\vec{r_u} \cdot \vec{r_v})^2$$

$$= |\vec{r_u}^2| \cdot |\vec{r_v}^2| - |\vec{r_u}^2| \cdot |\vec{r_v}^2| \cdot \cos\theta$$

$$= |r_u|^2 \cdot |r_v|^2 (1-\cos^2\theta) = |\vec{r_u}|^2 \cdot |\vec{r_v}|^2 \cdot \sin^2\theta$$

$$= |\vec{r_u} \times \vec{r_v}|^2 > 0$$

نلاحظ أن $EG-F^2 > 0$.

طريقة أخرى لإيجاد الإشارة. لدينا المعادلة $dr^2 = I = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ موجبة دوماً أي ليس لها جذور وبالتالي مميزها سالب:

موجب

$$\Delta < 0 \Rightarrow 4F^2 - 4EG < 0 \Rightarrow 4(F^2 - EG) < 0$$

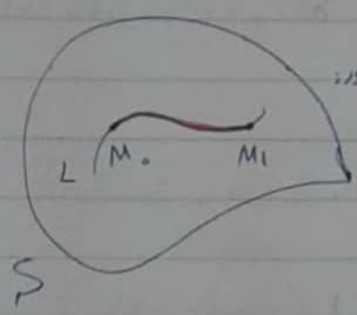
$$\Rightarrow EG - F^2 > 0$$

طول منحنٍ على سطح :

ليكن L منحنياً على السطح النظامي S ، معادلاته $\vec{r}(t) = \vec{r}\,(u(t), v(t))$

حيث $t_0 \leq t \leq t_1$

نعلم أن طول المنحني L الواقع بين M_0 و M_1 يعطى بالشكل:



$$S(t) = \int_{t_0}^{t_1} |d\vec{r}| = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| \cdot dt$$

حيث أن :

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^2} = \sqrt{\left(\vec{r_u} \cdot \frac{du}{dt} + \vec{r_v}\frac{dv}{dt}\right) \cdot \left(\vec{r_u}\frac{du}{dt} + \vec{r_v}\frac{dv}{dt}\right)}$$

$$= \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\,\frac{du}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$$

/ /

وبالتالي طول قوس المنحني L يعطى بدلالة معاملات الصيغة التربيعية الأولى E, F, G بالشكل:

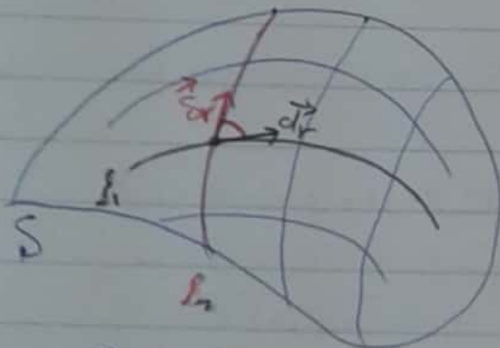
$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt$$

الزاوية بين منحنيين على سطح نظامي:

لتكن ξ_1, ξ_2 منحنيين متلاقيين في نقطة M_0 على السطح S.

$$\vec{dr} = \vec{r}_u\, du + \vec{r}_v\, dv$$

متجه المماس للمنحني ξ_1.



$$\vec{\delta r} = \vec{r}_u\, \delta u + \vec{r}_v\, \delta u$$

متجه المماس للمنحني ξ_2.

بالتعريف: الزاوية بين المنحنيين ξ_1, ξ_2 هي الزاوية بين المتجهين $\vec{dr}, \vec{\delta r}$ التي تعطى بالدستور.

$$\cos\theta = \frac{\vec{dr}\cdot\vec{\delta r}}{|\vec{dr}||\vec{\delta r}|} = \frac{(\vec{r}_u\, du + \vec{r}_v\, dv)\cdot(\vec{r}_u\, \delta u + \vec{r}_v\, \delta v)}{\sqrt{E(du)^2 + 2F\, du\, dv + G(dv)^2}\cdot\sqrt{E(\delta u)^2 + 2F\, \delta u\, \delta v + G(\delta v)^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{E\, du\cdot\delta u + F(du\,\delta v + \delta u\, dv) + G(dv\cdot\delta v)}{\sqrt{E(du)^2 + 2F\, du\, dv + G(dv)^2}\cdot\sqrt{E(\delta u)^2 + 2F\, \delta u\, \delta v + G(\delta v)^2}}$$

• حالة خاصة: لنوجد الزاوية بين الخطوط الإحداثية على السطح S.

$\vec{dr} = (du, 0)$ إن متجه المماس للخط الإحداثي ذي الوسيط u هو

$\vec{\delta r} = (0, \delta v)$ هو v = = = = = =

وبالتالي الزاوية بين الخطوط الإحداثية على سطح نظامي تعطى بالشكل التالي:

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{E\cdot G}}$$

152

وبالتالي الشرط اللازم والكافي لتعامد الخطوط الاحداثية على سطح نظامي هو ان يكون $F = 0$

مساحة منطقة على سطح نظامي :

ليكن S سطحاً نظامياً نجزئ السطح بواسطة منحنيات على السطح وذلك لإيجاد مساحة منطقة جزئية منه بين الخطوط الاحداثية :

(u_0, u_1) , (v_0, v_1)

ان مساحة المنطقة تساوي تقريباً مساحة متوازي الاضلاع الناتج من مسقط هذه المنطقة على المستوي الماس للسطح في نقطة تلاقي المنحنيين u_0 , v_0 .

والتي تعطى كما نعلم بالدستور : $ds = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|$

ان مساحة السطح S تساوي التكامل الثنائي على المنطقة D المعرف عليها السطح كما بالدستور :

$$S = \int_{u_0}^{u_1} \int_{v_0}^{v_1} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

تمرين صفحة 152 هام .

مساحة سطح الكرة :

$\vec{r} = (R\cos u \sin v \,,\, R\sin u \sin v \,,\, R\cos v)$

$D = \{(u,v) \;;\; 0 \leq u \leq 2\pi \,,\, 0 \leq v \leq \pi\}$

$\vec{r}_u = (-R\sin u \sin v \,,\, R\cos u \sin v \,,\, 0)$

$\vec{r}_v = (R\cos u \cos v \,,\, R\sin u \cos v \,,\, -R\sin v)$

/ /

$E = (\vec{r_u})^2 = R^2 \sin^2 v$

$F = \vec{r_u} \cdot \vec{r_v} = 0 \quad , \quad G = (r_v^2) = R^2$

الخطوط الاحداثية متعامدة على سطح الكرة.

$S = R^2 \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin v \, dv \right] du = 2\pi R^2 [-\cos v]_0^{\pi}$

$= 2\pi R^2 [-(-1-1)] = 4\pi R^2$

بصورة مشابهة نجد أن مساحة سطح الإهليلج هي $4\pi a.b$

الأحد 2017/10/29 المحاضرة الخامسة

السطوح التقايسية

تعريف: نقول عن سطحين S_1, S_2 أنهما متقايسان، إذا كان لهما الصيغة التربيعية الأولى ذاتها، أي:

$I_1 = I_2$ بمعنى آخر $\boxed{dS_1 = dS_2}$

بشكل توضيحي: إذا أمكن الانتقال من الصيغة التربيعية الأولى للسطح الأول إلى الصيغة التربيعية الأولى للسطح الثاني، من خلال تغيير (تحويل) محدد للاحداثيات بينهما.

كما هو موضح في المثال الآتي:

مثال: لنأخذ السطح الاسطواني المعطى بالمعادلات الوسيطية:

$x = u \quad , \quad y = \sin u \quad , \quad z = v$

نلاحظ أن:

$\vec{r_u} = (x_u, y_u, z_u) = (1, \cos u, 0) \quad , \quad \vec{r_v} = (0, 0, 1) = (x_v, y_v, z_v)$

$E = (\vec{r_u})^2 = 1 + \cos^2 u \quad , \quad F = \vec{r_u} \cdot \vec{r_v} = 0 \quad , \quad G = (\vec{r_v})^2 = 1$

$\Rightarrow I_1 = (1 + \cos^2 u) du^2 + dv^2$

نفرض S_2 السطح المستوي، معادلاته الوسيطية:

$x = u \quad , \quad y = v \quad , \quad z = 0$